Teoría de la Integral y de la Medida (curso 2020-21)
Hoja nº 1 (Introducción)

1. Demostrar que un subconjunto B del eje real es abierto si y solo si se representa como una unión numerable disjunta de intervalos abiertos (finitos o infinitos).

Solución. La implicación $\Leftarrow$ es trivial, así que nos centramos en la otra. Si $B \subset \mathbb{R}$ es abierto y $x \in B$, existe un intervalo I tal que $x \in I \subset B$. Si existe un intervalo tal, entonces existe "el intervalo más grande contenido en B que contiene a x" (la unión de todos los intervalos de este tipo). Denotamos por $\{I_\alpha\}$ a la familia de estos intervalos maximales. Los intervalos I_α son disjuntos dos a dos (en caso contrario no serían maximales). Por otra parte, cada uno de estos intervalos contiene un número racional, y por tanto solo puede haber una cantidad numerable de intervalos en la familia.

2. Sea $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ monótona y acotada. Probar que f es integrable Riemann.

Solución. Hacemos la demostración para f no decreciente. El caso de f no creciente es completamente análogo.

Sea $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. Puesto que $f(x) \le f(y)$ si $a \le x < y \le b$, se tiene que $s_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]} f = f(x_j)$, $i_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} f = f(x_{j-1})$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_f - \mathcal{L}_f &= \sum_{j=1}^{n} f(x_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} f(x_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)(x_{j+1} - x_j) \\
&= f(b)(x_n - x_{n-1}) - f(a)(x_1 - x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)(2x_j - x_{j+1} - x_{j-1}).
\end{aligned}$$

Si la partición es equiespaciada, $x_j = j(b-a)/n$, $j = 0, \ldots, n$, entonces $x_n - x_{n-1} = (b-a)/n = x_1 - x_0$ y $2x_j - x_{j+1} - x_{j-1} = 0$. Por consiguiente,

$$\mathcal{U}_f - \mathcal{L}_f = (f(b) - f(a))(b-a)/n < \varepsilon$$

si $n > (f(b) - f(a))(b-a)/\varepsilon$, y por tanto f es integrable Riemann.

3. Definimos la sucesión de funciones $f_m(x) = \lim_{n\to\infty} \big(\cos(\pi m! x)\big)^{2n}$ y luego la función $g(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$ $(x \in [0,1])$. (Observad que las funciones f_m son límites puntuales de funciones continuas.) Decidir si f_m y g son integrables Riemann y si son integrables Lebesgue.

¿Es cierta la igualdad

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^1 f_m(x)\,dx = \int_0^1 \big(\lim_{m\to\infty} f_m(x)\big)\,dx$$

(en algún sentido)?

Solución. Sea $m \in \mathbb{N}$. Dado $x \in [0,1]$ se tiene que

$$f_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = p/q \text{ con } p \in \{0, \ldots, q\},\ \text{mcd}(p,q) = 1 \text{ y } q | m!, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es entonces obviamente acotada y continua salvo en un número finito de puntos, y por tanto integrable Riemann.

Sin embargo, la función

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0 & \text{si } x \in [0,1],\ x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

no es integrable Riemann. En efecto, para cualquier particion $\mathcal{U}_f = 1$ y $\mathcal{L}_f = 0$, y por tanto no es posible hacer pequeña la diferencia $\mathcal{U}_f - \mathcal{L}_f$, que es siempre igual a 1.

En cuanto a la integrabilidad Lebesgue de f_m, los conjuntos

$$\{E_{k,\varepsilon} = \{x \in [0,1] : k\varepsilon < f_m(x) \leq (k+1)\varepsilon\}, \quad k \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0,$$

son o bien vacíos, o bien un número finito de puntos. En cualquier caso son conjuntos de medida exterior de Lebesgue 0, y por tanto medibles Lebesgue, con medida 0; véase el problema 10 (b). Concluimos que

$$A_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\varepsilon \operatorname{long}(E_{k,\varepsilon}) = 0 = B_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} k\varepsilon \operatorname{long}(E_{k,\varepsilon}),$$

y por tanto que las funciones f_m son integrables Lebesgue, con integral 0.

La integrabilidad Lebesgue de g involucra trabajar un poquito más. En este caso los conjuntos $E_{k,\varepsilon} = \{x \in [0,1] : k\varepsilon < g(x) \leq (k+1)\varepsilon\}$ son o bien vacíos o bien $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Si son vacíos son obviamente medibles Lebesgue, con medida 0. Si $E_{k,\varepsilon} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, estamos ante un conjunto numerable. Entonces, por el problema 7, tiene medida exterior de Lebesgue 0, y por el problema 10 (b) es medible Lebesgue con medida 0. Concluimos como antes que g es integrable Lebesgue con integral 0.

La identidad es cierta si trabajamos con integrales de Lebesgue, y no lo es cuando trabajamos con integrales de Riemann.

---

4. Probar que si las funciones $f_n : [a,b] \to \mathbf{R}$ son integrables Riemann y forman una sucesión uniformemente convergente a cierta función f, entonces f es integrable Riemann y se tiene $\displaystyle\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n$.

   Dar ejemplos de cómo, si el límite NO es uniforme, *puede* que no exista la integral $\displaystyle\int_a^b f$, o que no coincida con el $\displaystyle\lim_n \int_a^b f_n$.

Solución. Por converger la sucesión uniformemente, para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que

$$f_n(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon \quad \text{para todo } x \in [a,b], n \geq N.$$

Sea, $s_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]} f$, $i_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} f$, $s_j^n = \sup_{[x_{j-1},x_j]} f_n$, $i_j^n = \inf_{[x_{j-1},x_j]} f_n$. Entonces

$$i_j^n - \varepsilon \leq i_j \leq s_j \leq s_j^n + \varepsilon \quad \text{si } n \geq N.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_{f_n} - \varepsilon(b-a) \leq \mathcal{L}_f \leq \mathcal{U}_f \leq \mathcal{U}_{f_n} + \varepsilon(b-a) \quad \text{si } n \geq N.$$

Tomo una partición tal que para un $n \geq N$ fijo se tenga que $\mathcal{U}_{f_n} - \mathcal{L}_{f_n} \leq \varepsilon$. Esto es posible, por ser f_n integrable Riemann. Entonces

$$\mathcal{U}_f - \mathcal{L}_f \leq \mathcal{U}_{f_n} - \mathcal{L}_{f_n} + 2\varepsilon(b-a) \leq \varepsilon(1 + 2(b-a)).$$

La función del ejercicio anterior es un ejemplo en el que el límite no es integrable Riemann. Las funciones

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \le x \le 1/n, \\ 0 & \text{si } 1/n < x \le 1, \end{cases}$$

que son integrables Riemann, con integral $\int_0^1 f_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, convergen (no uniformemente) a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } 0 < x \le 1, \end{cases}$$

cuando $n \to \infty$. Esta función es integrable Riemann, con $\int_0^1 f = 0$. Así pues,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0 f_n = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n.$$

---

5. Probar que para cada $\epsilon > 0$ hay abiertos B que son densos en $I = [0,1]$ y que cumplen $|B| \le \epsilon$. (Para un abierto B, $|B|$ denota la suma de las longitudes de los intervalos que forman sus componentes conexas). *Indicación: considerar los complementarios de los conjuntos de Cantor generalizados.*

---

6. i) Si m^* denota la medida exterior de Lebesgue definida en clase, demostrar que dado un intervalo I cualquiera de $\mathbb{R}$ se tiene $m^*(I) = \text{long}(I)$. *Indicación*: probar primero que si $\{I_k\}_{k=1}^n$ es un recubrimiento finito de I por intervalos se tiene que $\sum_{k=1}^{n} \text{long}(I_k) \ge \text{long}(I)$. A continuación usar un argumento de "compacidad".

   Probar asimismo las desigualdades:

   ii) $A \subset B \implies m^*(A) \le m^*(B)$;

   iii) $m^*\left(\bigcup_{k\ge1} A_k\right) \le \sum_{k\ge1} m^*(A_k)$.

---

7. Probar que todo conjunto numerable tiene medida (exterior de Lebesgue) nula.

Solución. Sea $A = \{x_j\}_{j=1}^\infty$ un conjunto numerable en $\mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$ consideramos el recubrimiento de A dado por $\cup_{j=1}^\infty I_j$, con $I_j = \left(x_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, x_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right)$. Puesto que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \text{long}\, I_j = \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \varepsilon,$$

se concluye el resultado deseado.

---

8. Probar que la unión numerable de conjuntos de medida (de Lebesgue) nula tiene medida nula.

Solución. El resultado es consecuencia inmediata de la subaditividad de la medida exterior.

---

9. *a*) Encontrar un conjunto denso en $[0,1]$ de medida nula.

   b) Probar no obstante que si $A \subset [0,1]$ cumple $m^*(A) = 1$, entonces A es denso en $[0,1]$.

---

10. *a*) Con la misma notación de los ejercicios anteriores, demostrar que si $m^*(A) = 0$ entonces $m^*(A \cup B) = m^*(B)$, $\forall B \subset \mathbb{R}$.

    b) Lebesgue definió la clase de subconjuntos medibles de $[0,1]$ como la de aquellos $A \subset [0,1]$ tales que $m^*(A) + m^*(\mathcal{C}A) = 1$, (donde $\mathcal{C}A = [0,1] \setminus A$). Demostrar que si $m^*(A) = 0$ entonces A es medible.

---

11. Probar que el conjunto D de números en $[0,1]$ tal que su desarrollo decimal no contienen el 5 es un conjunto de medida (exterior de Lebesgue) cero (i.e., $m^*(D) = 0$).

Solución. El conjunto $D = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{10^j} : a_j \in \{0,1,2,3,4,6,7,8,9\}, j = 1, \dots \right\}$ se puede describir como $D = \cap_{k=1}^{\infty} D_k$, donde

$$D_k = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{10^j} : a_j \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, j = 1, \dots, a_j \neq 5 \text{ si } j = 1, \dots, k \right\}.$$

Por consiguiente, $m^*(D) \leq m^*(D_k) \leq \left(\frac{9}{10}\right)^k \to 0$ cuando $k \to \infty$.

---

12. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada. Definimos $\mathcal{O}_f(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \left\{ \sup_{|x-y| \leq \delta} f - \inf_{|x-y| \leq \delta} f \right\}$. [1]

    a) Probar que f es continua en x si y solo si $\mathcal{O}_f(x) = 0$.

    b) (*) Demostrar el Teorema de Lebesgue: f es integrable en el sentido de Riemann si y solo si $\forall k = 1, 2, \dots$, el conjunto $E_k = \{x \in [a,b] : \mathcal{O}_f(x) \geq 1/k\}$ tiene medida nula.

Solución. a) Recordemos que f es continua en x si para todo $\varepsilon > 0$ existe un δ tal que $|x-y| \leq \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Por otra parte $\mathcal{O}_f(x) = 0$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un δ tal que $\sup_{|x-y|\leq\delta} - \inf_{|x-y|\leq\delta} < \varepsilon$.

$\boxed{f \text{ continua en } x \Rightarrow \mathcal{O}_f(x) = 0}$: Puesto que $f(x) - \varepsilon \leq f(y) \leq f(x) + \varepsilon$ si $|x-y| \leq \delta$, se tiene que

$$\sup_{|x-y|\leq\delta} f(y) \leq f(x) + \varepsilon, \qquad \inf_{|x-y|\leq\delta} f(y) \geq f(x) - \varepsilon,$$

y por tanto que $\sup_{|x-y|\leq\delta} f(y) - \inf_{|x-y|\leq\delta} f(y) \leq 2\varepsilon$.

$\boxed{\mathcal{O}_f(x) = 0 \Rightarrow f \text{ continua en } x}$: Dado $\varepsilon > 0$, si $|x-y| \leq \delta$ se tiene que

$$f(x) - f(y) \leq \sup_{|x-y|\leq\delta} f(y) - \inf_{|x-y|\leq\delta} f(y) < \varepsilon, \qquad f(y) - f(x) \leq \sup_{|x-y|\leq\delta} f(y) - \inf_{|x-y|\leq\delta} f(y) < \varepsilon.$$

b) $\boxed{\Rightarrow}$ Sea f integrable Riemann en $[a,b]$. Queremos demostrar que el conjunto $\mathcal{D}_f$ de puntos de discontinuidad de f tiene medida 0. Por el apartado a),

$$\mathcal{D}_f = \{x \in [a,b] : \mathcal{O}_f(x) > 0\} = \cup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

[1] $\mathcal{O}_f(x)$ denota la oscilación de f en x.

Por tanto, solo necesitamos demostrar que cada E_k tiene medida 0.

Notación. $\omega_f(I) = \sup_I f - \text{ínf}_I f$. Estas cantidades están bien definidas si f es acotada. Recordemos que las funciones integrables Riemann son acotadas por definición.

Fijamos $k \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon > 0$. Por ser f integrable Riemann, existe una partición $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ con

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_f([x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon/(2k).$$

Sea F el conjunto de todos los i para los cuales (x_{i-1}, x_i) interseca a E_k. Entonces, para cada $i \in F$, $\omega_f([x_{i-1}, x_i]) \geq 1/k$. Así pues,

$$\frac{1}{k}\sum_{i\in F}(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i\in F} \omega_f([x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon/(2k),$$

de forma que la suma de las longitudes de los intervalos (x_{i-1}, x_i) que intersecan a E_k es menor que $\varepsilon/2$. Estos intervalos cubren todo E_k con la excepción de los puntos de $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ que estén en ese conjunto. Pero estos puntos se pueden cubrir con intervalos cuyas longitudes suman menos que $\varepsilon/2$, de forma que E_k se puede cubrir con intervalos abiertos cuya suma de longitudes es menor que ε, como queríamos demostrar.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea f acotada. Supongamos que el conjunto $\mathcal{D}_f$ de discontinuidades de f tiene medida 0. Queremos ver que entonces f es integrable Riemann.

Empezamos demostrando el siguiente resultado auxiliar: si $f : [a, b] :\to \mathbb{R}$, entonces, para todo $\alpha > 0$ el conjunto $G_\alpha := \{x : \Omega_f(x) < \alpha\}$ es abierto en $[a, b]$ y el conjunto $K_\alpha := \{x : \Omega_f(x) \geq \alpha\}$ es cerrado en $[a, b]$.

Sea $c \in G_\alpha$. Entonces $\Omega_f(c) < \alpha$ y, por definición, hay un $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{[c-\delta,c+\delta]\cap[a,b]} f - \text{ínf}_{[c-\delta,c+\delta]\cap[a,b]} f < \alpha.$$

Si $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$, hay un entorno $\hat{\delta}$ tal que $(x - \hat{\delta}, x + \hat{\delta}) \subset (c - \delta, c + \delta)$. Por consiguiente

$$\sup_{[x-\hat{\delta},x+\hat{\delta}]\cap[a,b]} f - \text{ínf}_{[x-\hat{\delta},x+\hat{\delta}]\cap[a,b]} f < \alpha$$

y concluimos que $\Omega_f(x) < \alpha$, y por tanto que G_α es abierto en $[a, b]$.

Puesto que $[a, b]$ es cerrado y G_α es abierto en $[a, b]$, entonce $K_\alpha = [a, b] \setminus G_\alpha$, es cerrado en $[a, b]$ (y en $\mathbb{R}$).

Pasamos a la demostración propiamente dicha. Fijamos $k \in \mathbb{N}$. Puesto que $E_k \subset \mathcal{D}_f$, E_k tiene medida 0. Así, E_k se puede cubrir con una familia numerable de intervalos abiertos cuyas longitudes suman menos que $1/k$. Por ser E_k cerrado y acotado, es compacto, de forma que una familia finita de estos intervalos, $\{I_i\}_{i=1}^m$, bastará para recubrir E_k, $E_k \subset \cup_{i=1}^m I_i$. Sea $\mathcal{E} = \{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m\}$, con $\varkappa_i = \overline{I}_i$. Podemos suponer, sustituyendo los pares que se intersequen por un único conjunto, que $\varkappa_i \cap \varkappa_j = \emptyset$.

El conjunto $K = [a, b] \setminus \cup_{i=1}^m I_i$ es compacto (de hecho, es la unión de un número finito de intervalos cerrados disjuntos) y está formado por puntos para los cuales $\mathcal{O}_f(x) < 1/k$. Para cada $x \in K$, hay un intervalo cerrado J con $x \in \text{int}(J)$ y $\omega_f(J) < \varepsilon$. Por compacidad, hay un número finito de dichos intervalos que recubre a K. Por intersección por K, podemos suponer que todos ellos son subconjuntos de K. Así, sea $\mathcal{C} = \{J_1, \ldots, J_p\}$ una familia de intervalos cerrados cuya unión es K y tal que $\omega_f(J_j) < \varepsilon$ para todo j. Podemos (y lo haremos) asumir que los intervalos J_k no se solapan (si hay dos con intersección no vacía los unimos en uno solo).

La familia $\mathcal{E}_f \cup \mathcal{C} = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]\}$ particiona $[a, b]$ y

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \omega_f([x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{m} \omega_f(I_i)\ell(\varkappa_i) + \sum_{j=1}^{p} \omega_f(J_j)\ell(J_j) \\
&\leq 2 \sup_{[a,b]} |f| \sum_{i=1}^{m} \ell(\varkappa_i) + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \ell(J_j) \\
&\leq 2 \sup_{[a,b]} |f| \sum_{i=1}^{m} \ell(\varkappa_i) + \frac{1}{k}(b - a) \\
&\leq 2 \frac{1}{k} \sup_{[a,b]} |f| + \frac{1}{k}(b - a).
\end{aligned}$$

El lado derecho se puede hacer arbitrariamente pequeño, y por tanto f es integrable.